

## Zur Beschreibung der Coulomb-Wechselwirkung in der Quantenelektrodynamik \*

ARND WÜLFING

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforsch. **24 a**, 1151—1160 [1969]; eingegangen am 24. April 1969)

The covariance of the scattering theory in the formulations of quantum electrodynamics by GUPTA and BLEULER, by VALATIN, and in the formulation with COULOMB gauge is reinvestigated. The effect of gauge transformations and the effect of time disordering, both generally connected with a Lorentz transformation, compensate each other. For the potential in the GUPTA-BLEULER formulation there exist two different generators of Lorentz transformations.

Geht man bei der Behandlung der Quantenelektrodynamik von freien Feldern aus, so hat man zunächst die Wahl, entweder zwei, drei oder vier Photontypen einzuführen. Im Gegensatz zur Quantisierung von GUPTA<sup>1</sup> und BLEULER<sup>2</sup> mit ihren vier Photontypen ist die Möglichkeit, nur dreierlei Photonen zu verwenden, verhältnismäßig wenig bekannt. Sie wurde von VALATIN<sup>3</sup> bemerkt und bildet den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung. Die Behandlung der Quantenelektrodynamik, die allein die zwei transversalen Photonen kennt, wird im folgenden kurz als „Coulomb-Formulierung“ bezeichnet.

Alle drei Beschreibungen führen auf die gleichen beobachtbaren Ergebnisse, unterscheiden sich jedoch begrifflich sehr voneinander. Die Coulomb-Formulierung beschreibt die Coulomb-Wechselwirkung durch einen Ausdruck

$$f \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{8\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

als Fernwirkung und die Wechselwirkung zwischen Strom und Photonen durch  $e d^3\mathbf{x} j_m(\mathbf{x}) A_\perp^m(\mathbf{x})$  formal als Kontaktwechselwirkung. Der nach den Koppelungsparametern  $e$  und  $f = e^2$  zu vermutende Zusammenhang zwischen diesen ganz verschiedenartigen Wechselwirkungen wird nicht zu erklären versucht. Man weiß lediglich, daß die Beziehung  $f = e^2$  aus Gründen der relativistischen Invarianz notwendig ist. In den beiden anderen Formulierungen wird die Wechselwirkung durch einen einheitlichen Ausdruck

$e d^3\mathbf{x} j_\mu(\mathbf{x}) A^\mu(\mathbf{x})$  beschrieben, wobei der Potentialoperator  $A^\mu(\mathbf{x})$  außer den transversalen Komponenten  $A_\perp^m(\mathbf{x})$  auch longitudinale Komponenten  $A_\parallel^m(\mathbf{x})$  und eine „skalare“ Komponente  $A^0(\mathbf{x})$  umfaßt. Die Coulomb-Wechselwirkung kommt nun durch Austausch virtueller nichttransversaler Photonen zustande.

Ob damit Gupta und Bleuler oder Valatin wirklich eine einheitliche Behandlung der elektrodynamischen Wechselwirkungen gelungen ist, hängt davon ab, ob man die hypothetischen nichttransversalen Photonen als physikalische oder nur als fiktive Teilchen anzusehen hat. Ein elektrodynamischer Effekt kann offenbar keine Antwort auf diese Frage geben, da die Vermittlung der — eben verschieden beschreibbaren — Coulomb-Wechselwirkung ja der einzige derartige Effekt dieser Teilchen sein sollte.

Bei Gupta und Bleuler spricht die indefinite Metrik und die vom Formalismus her gesehen künstliche Unterscheidung zwischen erlaubten und nichterlaubten Zuständen eher für einen fiktiven Charakter der nichttransversalen Photonen. (Wenn sich in Kapitel II ergeben wird, daß sich die Zahl dieser Quanten bei einer Lorentz-Transformation nicht auf eindeutige Weise ändert, so mag das mathematischer Zufall sein.) Die „unphysikalische Monstrosität“<sup>4</sup> der nichttransversalen Photonen dieser Formulierung hat in den letzten Jahren eine Reihe von Autoren veranlaßt, sich wieder mehr der Coulomb-Formulierung oder auch anderen Möglichkeiten zuzuwenden<sup>4–12</sup>.

Sonderdruckanforderungen erbeten an A. Wülfing, D-3411 Lindau, Fleckenstr. 89.

\* D 7.

<sup>1</sup> S. N. GUPTA, Proc. Phys. Soc. London A **63**, 681 [1950].

<sup>2</sup> K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **23**, 567 [1950].

<sup>3</sup> I. G. VALATIN, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Medd. **26**, No 13 [1951].

<sup>4</sup> S. WEINBERG, Phys. Rev. **138 B**, 988 [1965].

<sup>5</sup> S. WEINBERG, Phys. Rev. **134 B**, 892 [1964].

<sup>6</sup> S. WEINBERG, Phys. Rev. **135 B**, 1049 [1964].

<sup>7</sup> K. JOHNSON u. B. ZUMINO, Phys. Rev. Letters **3**, 351 [1959].

<sup>8</sup> B. ZUMINO, J. Math. Phys. **1**, 1 [1960].

<sup>9</sup> K. JOHNSON, Brandeis Lectures 1964, Vol. II.

<sup>10</sup> J. D. BJORKEN u. S. D. DRELL, Relativistic Quantum Fields, 1965.

<sup>11</sup> L. E. EVANS u. T. FULTON, Nucl. Phys. **21**, 492 [1960].

<sup>12</sup> S. MANDELSTAM, Ann. Phys. New York **19**, 1 [1962].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die Valatin-Formulierung bedarf keiner indefiniten Metrik. Die Operatoren des nichttransversalen Potentials lassen sich aus dem Streuoperator eliminieren, wobei sich dieser als identisch mit dem der Coulomb-Formulierung erweist. Daß einlaufende nichttransversale Photonen an geladenen Teilchen nicht gestreut werden, also elektrodynamisch unbeobachtbar sind, folgt darum ohne Hilfe einer zusätzlichen Bedingung für die Erlaubtheit von Zuständen allein aus dem Ansatz für Quantisierung und Wechselwirkung. Die Feldgleichungen in der Heisenberg-Darstellung gelten bei Valatin wie in der Coulomb-Formulierung als Operatoridentitäten. Daß diese Formulierung so wenig bekannt wurde, rührt wohl daher, daß ihre Kovarianz viel weniger auf der Hand liegt als die der Formulierung von Gupta und Bleuler und daß auch die Vertauschungsrelationen für das Potential bei Valatin nicht die bestechende Einfachheit der Vertauschungsrelationen in jener Formulierung aufweisen.

In den Kapiteln III, IV und V der vorliegenden Arbeit wird nachzuweisen versucht, daß die Streutheorie in allen drei Formulierungen kovariant ist. Zu diesem Zweck werden in Kapitel II die Erzeugenden der Lorentz-Transformationen der freien Photonoperatoren angegeben. Mit Hilfe der Drehimpulsoperatoren wird auch eine Motivierung für den Quantisierungsansatz von Valatin möglich sein. Ausgegangen wird von freien Feldern, deren Fourier-Darstellung und Vertauschungsrelationen in Kapitel I bereitgestellt werden. Außer Photonen werden nur Elektronen und Positronen betrachtet. In Kapitel V werden schließlich noch die drei möglichen Spielarten der Valatin-Formulierung verglichen. (Sie werden alle nach Valatin benannt, obwohl dieser nur eine von ihnen angibt.)

## I. Freie Felder und ihre Vertauschungsrelationen

Bei einem Maßsystem mit  $\hbar = c = 1$  und einem metrischen Tensor mit

$$x^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = x^0 k^0 + x_n k^n = x^0 k^0 - \mathbf{x} \mathbf{k} = x k$$

lautet die Fourier-Darstellung für den freien Photonfeldoperator in der Valatin-Formulierung

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{s=0, \pm 1} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2 k_0} \cdot (e^\mu(\mathbf{k}, s) c_{ks} e^{-ikx} + e^{\mu*}(\mathbf{k}, s) c_{ks}^* e^{ikx}). \quad (1,1)$$

Summiert man über  $s = \pm 1$ , so erhält man das transversale Potential  $A_\perp^\mu(x)$ . Der Index  $s=0$  liefert das Valatin-Potential  $A_V^\mu(x)$ .  $c_{k,s}^*$  sei vorläufig (bis zur Betrachtung anderer Möglichkeiten in Kapitel V aus praktischen Gründen von der Darstellung bei Valatin abweichend) Erzeugungsoperator und es gelte

$$[c_{ks}, c_{k's'}^*] = \mu_s 2 k^0 \delta_{ss'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1,2)$$

mit

$$\mu_s = \pm 1 \quad \text{für} \quad |s| = \frac{1}{2}. \quad (1,3)$$

Bei  $c$ -Zahlen bezeichne der Stern das Konjugiert-komplexe. Für die Polarisationsvektoren gilt

$$\sum_{s=\pm 1} e^{m*}(\mathbf{k}, s) e^n(\mathbf{k}, s) = \delta^{mn} - k^m k^n / k^0 k^0, \quad (1,4)$$

$$\sum_{n=1}^3 e^{n*}(\mathbf{k}, s) e^n(\mathbf{k}, s') = \delta_{ss'}, \quad (1,5)$$

$$k_\mu e^\mu(\mathbf{k}, s) = 0. \quad (1,6)$$

Interessiert man sich wie WEINBERG<sup>6</sup> für den Spin der Photonen, so sind die folgenden zirkularen Einheitsvektoren als spezielle Basis für die transversalen Polarisierungen vorteilhaft:

$$\begin{aligned} e^3(\mathbf{k}, \pm 1) &= -\sqrt{\frac{1}{2}} \sin \vartheta; \\ e^1(\mathbf{k}, \pm 1) &= \sqrt{\frac{1}{2}} (\cos \alpha \cos \vartheta \mp i \sin \alpha); \\ e^0(\mathbf{k}, \pm 1) &= 0; \\ e^2(\mathbf{k}, \pm 1) &= \sqrt{\frac{1}{2}} (\sin \alpha \cos \vartheta \pm i \cos \alpha). \end{aligned} \quad (1,7)$$

In den gleichen Koordinaten erhält man für das Valatin-Potential

$$\begin{aligned} e^0(\mathbf{k}, 0) &= 1; & e^1(\mathbf{k}, 0) &= \cos \alpha \sin \vartheta; \\ e^3(\mathbf{k}, 0) &= \cos \vartheta; & e^2(\mathbf{k}, 0) &= \sin \alpha \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Die Vertauschungsrelationen im Ortsraum lauten

$$[A_V^0(x), A_V^0(y)] = -i D(x-y) = i \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \delta(y^0 - x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1,9)$$

$$[A_V^m(x), A_V^0(y)] = -i \frac{x^m - y^m}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left( \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |x^0 - y^0|) + \frac{\vartheta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |x^0 - y^0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \quad (1,10)$$

$$\text{mit} \quad \vartheta(a) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad a \geq 0,$$

$$[A_V^m(x), A_V^n(y)] = -i \frac{(x^m - y^m)(x^n - y^n)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} D(x - y) + i \partial(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |x^0 - y^0|) \partial_x^m \partial_y^n \frac{x^0 - y^0}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1,11)$$

$$[A_\perp^m(x), A_\perp^n(y)] = i \left( \delta^{mn} - \frac{(x^m - y^m)(x^n - y^n)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) D(x - y) + i \partial(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |x^0 - y^0|) \partial_x^m \partial_y^n \frac{x^0 - y^0}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1,12)$$

Gebraucht wird noch die Feldgröße

$$A^{(\mu)}(x) = - \int d^3\mathbf{y} \frac{A^\mu(\mathbf{y}, x^0)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1,13)$$

mit den Eigenschaften

$$\dot{A}^{(\mu)}(x) = A^\mu(x), \quad (1,14)$$

$$\partial^\mu A_V^{(\nu)}(x) = \partial^\nu A_V^{(\mu)}(x), \quad (1,15)$$

$$\sum_\mu \partial_\mu A^{(\mu)}(x) = 0. \quad (1,16)$$

Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$[A^0(\mathbf{x}, t), A^{(\nu)}(\mathbf{y}, t)] = [A^\nu(\mathbf{y}, t), A^{(0)}(\mathbf{x}, t)] = \frac{i \delta^{\nu 0}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1,17)$$

$$[A^m(\mathbf{x}, t), A^{(n)}(\mathbf{y}, t)] = -i \frac{(x^m - y^m)(x^n - y^n)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad (1,18)$$

$$[A_\perp^m(\mathbf{x}, t), A_\perp^{(n)}(\mathbf{y}, t)] = \frac{-i}{8\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left( \delta^{mn} + \frac{(x^m - y^m)(x^n - y^n)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right). \quad (1,19)$$

In der Formulierung von Gupta und Bleuler wird bei der Fourier-Darstellung von  $A^\mu(x)$  abweichend von (1,1) über vier Indizes  $s = 0, 1, 2, 3$  summiert.  $s = 0$  mag jetzt  $A^0(x)$ ,  $s = 1$  die longitudinale und  $s = 2$  und  $3$  die beiden transversalen Komponenten von  $A^m(x)$  liefern. Abweichend von (1,3) gilt dann

$$\mu_s = \pm 1 \quad \text{für} \quad s = \begin{cases} 1, 2, 3 \\ 0 \end{cases}. \quad (1,20)$$

Im Ortsraum ergibt sich

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -i g^{\mu\nu} D(x - y). \quad (1,21)$$

Für das Elektron-Positron-Feld  $\psi_a(x)$  werden die folgenden Beziehungen verwendet:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{\alpha\beta} = 2 g^{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}, \quad (1,22)$$

$$\bar{\psi}(x) = (\psi^*(x))^T \gamma^0, \quad (1,23)$$

$$\{\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1,24)$$

$$\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = 0, \quad (1,25)$$

$$(i \gamma \delta - m) \psi(x) = 0, \quad (1,26)$$

$$j^\mu(x) = - : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :. \quad (1,27)$$

Die Vertauschungsrelationen (1,9–12) sehen wesentlich weniger einfach aus als die Vertauschungsrelationen (1,21) und (1,24) und (1,25). Deshalb würde man es in der Valatin-Formulierung gern besser verstehen, weshalb sich auf die vier Feldkomponenten des Potentials gerade drei Photontypen verteilen sollen. Einen Hinweis gibt das Spinorfeld  $\psi_a(x)$ . Die Einfachheit der Beziehungen (1,24) und (1,25) wird dadurch erreicht, daß man in  $\psi_a(x)$  einen Elektron-Vernichtungs- und einen Positron-Erzeugungsterm zusammenfaßt. Der Elektronteil allein besteht aus einem Feld mit vier Komponenten bei – der Zahl der möglichen Spineinstellungen entsprechend – nur zwei Vernichtungsoperatoren  $a_{p,s=\pm 1/2}$ . Sollte der Spin auch für die Quantisierung der Photonen wesentlich sein, so wären der Ganzzahligkeit des Bosonspins entsprechend gerade drei Typen von Vernichtungsoperatoren  $c_{k,s=0,\pm 1}$  zu erwarten. Daß der Index  $s$  in (1,1) und (1,2) bei Verwendung zirkularer Einheitsvektoren gerade die Bedeutung eines Drehimpulses in Impulsrichtung besitzt, ergibt sich nun mit Hilfe des im nächsten Kapitel angegebenen Ausdrucks (2,21) für den Drehimpuls aus

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \frac{k^l}{k^0} [I^{mn}, c_{k,s}^*] = s \hbar c_{k,s}^*; \quad s = 0, \pm 1, \quad (1,28)$$

wobei  $\varepsilon_{lmn}$  der Ricci-Tensor mit  $\varepsilon_{123} = +1$  ist.

In der Gupta-Bleuler-Formulierung ist eine befriedigende Kennzeichnung der vier Photontypen durch den Spin nicht möglich, da beide nichttransversalen Photonen den Spin 0 haben.

## II. Lorentz-Transformation der freien Felder

Um an den Feldoperatoren in der Wechselwirkungsdarstellung infinitesimale Lorentz-Transformationen ausführen zu können, braucht man eine Darstellung der Poincaré-Gruppe in der Form

$$L(\varepsilon, \eta) = (1 - \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu} + i \eta_\mu P^\mu). \quad (2,1)$$

Die Erzeugenden dieser Gruppe müssen den folgenden Bedingungen genügen:

$$i[I^{\kappa\lambda}, I^{\mu\nu}] = g^{\kappa\mu} I^{\lambda\nu} + g^{\kappa\nu} I^{\mu\lambda} + g^{\mu\lambda} I^{\nu\kappa} + g^{\lambda\nu} I^{\mu\kappa}, \quad (2,2)$$

$$i[I^{\mu\nu}, P^\kappa] = g^{\kappa\mu} P^\nu - g^{\kappa\nu} P^\mu, \quad (2,3)$$

$$[P^\kappa, P^\lambda] = 0. \quad (2,4)$$

Ist bei der Fourier-Darstellung des Potentials  $A^\mu(x)$  wie in (1,1) die „negative Frequenz“ ( $e^{ikx}$ ) dem Erzeugungsoperator  $c_{ks}^*$  zugeordnet, so darf man fordern, daß

$$i[P^\kappa, A^\mu(x)] = \partial^\kappa A^\mu(x) \quad (2,5)$$

gilt. Um den Kommutator  $[I^{\kappa\lambda}, A^\mu(x)]$  bestimmen zu können, sollen zunächst Ausdrücke für  $I^{\kappa\lambda}$  und  $P^\kappa$  gesucht werden, die (2,2–5) erfüllen und einem lokalen Ansatz

$$I^{\kappa\lambda} = \int d^3\mathbf{y} [y^\kappa T^{\lambda 0}(y) - y^\lambda T^{\kappa 0}(y)] \quad (2,6)$$

$$\text{bzw.} \quad P^\kappa = \int d^3\mathbf{y} T^{\kappa 0}(y) \quad (2,7)$$

mit einem in den Feldern bilinearen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor  $T^{\kappa 0}(y)$  genügen.

Im Fall der transversalen Photonen läßt sich  $T_{\perp}^{\kappa 0}(y)$  leicht gewinnen, indem man den klassischen Poynting-Vektor durch ein entsprechendes Normalprodukt von Feldoperatoren ersetzt:

$$T_{\perp}^{\kappa 0}(y) = :(\partial^\kappa A_{\perp}^m(y) - \partial^\kappa A_{\perp}^m(y)) A_{\perp m}(y): \quad (2,8)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\kappa 0} :(\partial^\lambda A_{\perp}^m(y) - \partial^\lambda A_{\perp}^m(y)) \partial_\lambda A_{\perp m}(y):.$$

Für nichttransversale freie Photonen gibt es keine klassische Analogie. Soll  $T_V^{\kappa 0}(y)$  nur aus Valatin-Potentialen  $A_V^\lambda(y)$ , ihren Ableitungen und dimensionslosen Koeffizienten bestehen, so muß es sich wegen (1,16–18) und  $:A^\kappa(y) A^\lambda(y): = :A^\lambda(y) A^\kappa(y):$ , sowie aus Gründen des Transformationsverhaltens und der Dimension folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$T_V^{\kappa 0}(y) = a_{\mu\nu} : \partial^\kappa A_V^\mu(y) A_V^\nu(y) :$$

$$+ b_{\mu\nu} : A_V^\mu(y) \partial^\kappa A_V^\nu(y) :$$

$$+ g^{\kappa 0} c_{\mu\nu} : \partial^\lambda A_V^\mu(y) \partial_\lambda A_V^\nu(y) : \quad (2,9)$$

Da das Transformationsverhalten von  $A_V^\mu(y)$  erst bestimmt werden soll, läßt sich über die Koeffizienten  $a_{\mu\nu}$ ,  $b_{\mu\nu}$ ,  $c_{\mu\nu}$  zunächst nur sagen, daß

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} \quad \text{gilt.} \quad (2,10)$$

Bei den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, daß die räumliche Differentiation unter den Integralen (2,6) und (2,7) „übergewälzt“ werden darf. Es ist zweckmäßig, für (2,6) und (2,7) mit (2,9) zu-

nächst nicht (2,2), sondern (2,3) und (2,5) zu fordern. Dann folgt mit (2,10)

$$a_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = 0 \quad \text{und} \quad b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$

$$a_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = \alpha - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = \frac{1}{2} - \beta \quad \text{für} \quad \mu = \nu = 0,$$

$$a_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = -\beta \quad \text{und} \quad b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} = \alpha \quad \text{für} \quad \mu = \nu \neq 0,$$

$$\alpha \quad \text{und} \quad \beta \quad \text{beliebig.} \quad (2,11)$$

Es gilt also

$$T_V^{\kappa 0}(y) = - : \partial^\kappa A_V^0(y) \partial_0 A_V^0(y) : \quad (2,12)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\kappa 0} : \partial^\lambda A_V^0(y) \partial_\lambda A_V^0(y) : + R^{\kappa 0}(y, \alpha, \beta, b_{\mu\nu}).$$

Das Restglied  $R^{\kappa 0}(y, \alpha, \beta, b_{\mu\nu})$  enthält die von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $b_{\mu\nu}$  abhängigen Terme und trägt zu  $P^\kappa$  und  $I^{\kappa\lambda}$  nichts bei. Mit (2,3) ist auch (2,2) erfüllt, mit (2,5) auch (2,4). Wenn man will, kann man  $R^{\kappa 0}(y, \alpha, \beta, b_{\mu\nu})$  noch vereinfachen, indem man fordert, daß für  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > |x^0 - y^0|$

$$[T_V^{\kappa 0}(y), T_V^{\lambda 0}(x)] = 0 \quad \text{gilt.} \quad (2,13)$$

Man findet  $\alpha = \beta = 0$ ,  $b_{\mu\nu} = b \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}$  mit beliebigem  $b$  und

$$R^{\kappa 0}(y, b) = b \left( \frac{1}{2} \partial^\kappa \partial^0 : A_V^0(y) A_V^0(y) : \right. \\ \left. - g^{\kappa 0} : \partial^\lambda A_V^0(y) \partial_\lambda A_V^0(y) : \right). \quad (2,14)$$

Bereits für  $\alpha = \beta$  gilt

$$\partial_\kappa T_V^{\kappa 0}(y) = 0. \quad (2,15)$$

Mit (1,13) und  $I^{\kappa\lambda} = I_V^{\kappa\lambda} + I_{\perp}^{\kappa\lambda}$  ergibt sich nun

$$i[I^{\kappa\lambda}, A^\mu(x)] = (x^\kappa \partial^\lambda - x^\lambda \partial^\kappa) A^\mu(x) \\ + g^{\kappa\mu} A^\lambda(x) - g^{\lambda\mu} A^\kappa(x) \\ + g^{\kappa 0} \partial^\mu A^{(\kappa)}(x) - g^{\lambda 0} \partial^\mu A^{(\lambda)}(x).$$

Die Beziehungen (2,3) und (2,16) sind mit den Jacobischen Identitäten verträglich. Schreibt man

$$\sum_\nu \varepsilon_\nu^\mu A^{(\nu)}(x) = A(x) \quad (2,17)$$

$$\text{und} \quad x^\mu = (\delta_\nu^\mu + \varepsilon_\nu^\mu) x'^\nu + \eta^\mu, \quad (2,18)$$

so folgt mit (2,1)

$$L(\varepsilon, \eta) (\delta_\nu^\mu + \varepsilon_\nu^\mu) A^\nu(x') L^{-1}(\varepsilon, \eta) = \tilde{A}^\mu(x) \\ = A^\mu(x) + \partial^\mu A(x); \quad (2,19)$$

$A^\mu(x)$  besitzt hierin ebenso wie  $A^\nu(x')$  die durch (1,4–7) definierte Eichung. Die Lorentz-Transformation des Potentials ist in der Valatin-Formulierung mit einer Umeichung verbunden. Daß der Term  $A_V(x)$  analog zum Term  $A_{\perp}(x)$  gebildet ist, wird sich bei der Untersuchung des Streuoperators in Kapitel III als glücklich erweisen.



Mit den Polarisationsvektoren (1,7 und 8) werden  $P^\nu$  und  $I^{\mu\nu}$  diagonal bezüglich der Indizes  $s$ :

$$P^\nu = \sum_{s=0, \pm 1} \mu_s \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2 k_0} k^\nu c_{\mathbf{k},s}^* c_{\mathbf{k},s}, \quad (2,20)$$

$$I^{mn} = \sum_{s=0, \pm 1} \mu_s \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2 k_0} c_{\mathbf{k},s}^* (k^m i \partial^n - k^n i \partial^m + s N^{mn}(\mathbf{k})) c_{\mathbf{k},s}, \quad (2,21)$$

$$I^{0n} = \sum_{s=0, \pm 1} \mu_s \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2 k_0} c_{\mathbf{k},s}^* (k^0 i \partial^n + s N^{0n}(\mathbf{k})) c_{\mathbf{k},s}, \quad (2,22)$$

Hierin bedeutet  $\partial_n$  die partielle Ableitung nach dem Impuls  $k^n$ , und es gilt

$$\begin{aligned} N^{01}(\mathbf{k}) &= \sin \alpha \operatorname{ctg} \vartheta; & N^{20}(\mathbf{k}) &= \cos \alpha \operatorname{ctg} \vartheta; \\ N^{23}(\mathbf{k}) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \vartheta}; & N^{31}(\mathbf{k}) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}; \\ N^{30}(\mathbf{k}) &= N^{12}(\mathbf{k}) = 0; & N^{\mu\nu}(\mathbf{k}) &= -N^{\nu\mu}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2,23)$$

Für die homogene Lorentz-Transformation folgt mit  $k'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) k'^\nu$

$$L(\varepsilon) c_{\mathbf{k}',s} L^{-1}(\varepsilon) = (1 + \frac{1}{2} i s \varepsilon_{\mu\nu} N^{\mu\nu}(\mathbf{k})) c_{\mathbf{k},s}. \quad (2,24)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) e^\nu(\mathbf{k}', s) &= e^\mu(\mathbf{k}, s) - \varepsilon^\mu_0 k^0 \partial_n e^\mu(\mathbf{k}, s) + \varepsilon^\mu_\nu e^\nu(\mathbf{k}, s) \\ &= (1 - \frac{1}{2} i s \varepsilon_{\nu\rho} N^{\nu\rho}) e^\mu(\mathbf{k}, s) + \frac{\varepsilon^\mu_0 e^n(\mathbf{k}, s)}{k^0} k^\mu. \end{aligned} \quad (2,25)$$

$$\text{Mit } \lambda(\varepsilon, \mathbf{k}, s) = \varepsilon^\mu_0 e^n(\mathbf{k}, s) / k^0 \quad (2,26)$$

erhält man also in Übereinstimmung zu (2,18)

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) e^\nu(\mathbf{k}', s) c_{\mathbf{k}',s} L^{-1}(\varepsilon) \\ = (e^\mu(\mathbf{k}, s) + \lambda(\varepsilon, \mathbf{k}, s) k^\mu) c_{\mathbf{k},s}. \end{aligned} \quad (2,27)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Gruppeneigenschaften erfüllt sind.

Für die Transformation des skalaren Gupta-Bleuler-Potentials kann man (2,12) übernehmen. Für das longitudinale Potential  $A_L^m(x)$  braucht man in (2,12) wegen (1,20) nur  $A_V^0(x)$  durch

$$i A_L^0(x) = -i \sum_m \partial_m A^{(m)}(x)$$

zu ersetzen, wobei  $A^{(\mu)}(x)$  durch (1,13) und (1,21) definiert ist. Man findet dann

$$\begin{aligned} i[I^{\lambda\lambda}, A^\mu(x)] &= (x^\lambda \partial^\lambda - x^\lambda \partial^\lambda) A^\mu(x) \\ &+ g^{\mu\lambda} A^\lambda(x) - g^{\mu\lambda} A^\lambda(x) - g^{0\lambda} \partial^\mu A^{(\lambda)}(x) \\ &+ g^{0\lambda} \partial^\mu A^{(\lambda)}(x) + (g^{0\lambda} g^{\lambda\mu} - g^{0\lambda} g^{\lambda\mu}) \sum_\nu \partial_\nu A^{(\nu)}(x) \end{aligned} \quad (2,28)$$

und

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) A^\nu(x') L^{-1}(\varepsilon) \\ = A^\mu(x) + \partial^\mu A(x) + \varepsilon^\mu_0 \sum_\nu \partial_\nu A^{(\nu)}(x) \\ = \tilde{A}^\mu(x). \end{aligned} \quad (2,29)$$

Es gilt

$$[\tilde{A}^\mu(x), \tilde{A}^\nu(y)] = -i g^{\mu\nu} D(x-y), \quad (2,30)$$

wie es bei der Kovarianz von  $g^{\mu\nu}$  und  $D(x)$  in (1,21) auch sein muß.

Fügt man zu den eben benutzten  $I^{\kappa\lambda}$  noch einen Term

$$\begin{aligned} g^{\kappa 0} \int d^3 \mathbf{x} (A^\lambda(x) \sum_\mu \partial_\mu A^{(\mu)}(x) - A^\lambda(x) \partial_\mu A^\mu(x) \\ - g^{\lambda 0} \int d^3 \mathbf{x} (A^\kappa(x) \sum_\mu \partial_\mu A^{(\mu)}(x) - A^\kappa(x) \partial_\mu A^\mu(x)) \end{aligned} \quad (2,31)$$

hinzu, der sich nicht auf die Form (2,6) bringen läßt und der auch bezüglich der vier Photontypen nicht diagonal ist, so werden die  $A^{(\nu)}(x)$ -Terme in (2,28) und (2,29) gerade kompensiert und man erhält

$$L(\varepsilon) (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) A^\nu(x') L^{-1}(\varepsilon) = A^\mu(x). \quad (2,32)$$

Diese Form der Lorentz-Transformation wurde von BLEULER<sup>2</sup> benutzt. Sowohl mit als auch ohne Zusatz (2,31) erfüllt  $I^{\kappa\lambda}$  die Beziehungen (2,2) und (2,3) und die Jacobischen Identitäten, und man erhält auch in beiden Fällen eine kovariante Streutheorie, wie in Kapitel III und V gezeigt werden soll. [Wenn man den Zusatz (2,31) mit einer von eins verschiedenen  $c$ -Zahl multipliziert, gilt (2,2) nicht mehr.]

Bei der Transformation des Elektron-Proton-Feldes wird von den folgenden beiden Beziehungen Gebrauch gemacht:

$$L(\varepsilon) (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) j^\nu(x') L^{-1}(\varepsilon) = j^\mu(x), \quad (2,33)$$

$$L(\varepsilon) \bar{\psi}(x') \psi(x') L^{-1}(\varepsilon) = \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (2,34)$$

### III. Lorentz-Invarianz des Streuoperators in den Formulierungen von Valatin und von Gupta und Bleuler

Der Streuoperator der Quantenelektrodynamik lautet:

$$S = T(\exp\{-i \int h(x) dx\}) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \quad (3,1)$$

mit

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^3 x_n \dots d^3 x_1 T(h(x_n) \dots h(x_1)) \quad (3,2)$$

$dx$  steht für das Volumenelement  $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  und

$$h(x) = e j_\mu(x) A^\mu(x) - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad (3,3)$$

ist (für die Valatin- und für die Gupta-Bleuler-Formulierung) die renormierte Wechselwirkungsenergiedichte in der Wechselwirkungsdarstellung.

Von einer Streutheorie muß man verlangen, daß der Streuoperator unabhängig vom Bezugssystem ist. Um das zu prüfen, ist es hinreichend, infinitesimale Lorentz-Transformationen zu betrachten. Da die Zustände der ein- und auslaufenden Teilchen mit Hilfe der Erzeugungsoperatoren in der Wechselwirkungsdarstellung beschrieben werden, besteht der Operator  $L(\varepsilon)$  für eine infinitesimale Lorentz-Transformation des Streuoperators einfach aus dem Produkt der Operatoren für die gleiche Lorentz-Transformation der einzelnen bei der Streuung mitwirkenden Teilchenfelder in der Wechselwirkungsdarstellung. Nun wird bei einer Lorentz-Transformation die Eichung der in  $h(x)$  eingehenden Potentiale im allgemeinen geändert. Da ferner die Gleichzeitigkeit bei einer Änderung des Bezugssystems im allgemeinen nicht erhalten bleibt, wird auch die Zeitordnung  $T$  bei einer Lorentz-Transformation zerstört. Es ist deshalb reizvoll, die Lorentz-Invarianz des Streuoperators im Ortsraum zu untersuchen.

Wie bei einigen anderen Problemen der Quantenelektrodynamik erweist es sich im folgenden als zweckmäßig, zunächst ein adiabatisches Ein- und Ausschalten der Wechselwirkung einzuführen, und zwar im Raum wie in der Zeit. Es sei also

$$h_\alpha(x) = h(x) \cdot \exp\{-\alpha \sum_\nu |x^\nu|\}, \quad \alpha > 0 \quad (3,4)$$

$$S_\alpha = T(\exp\{-i \int h_\alpha(x) dx\}), \quad (3,5)$$

$$S = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha. \quad (3,6)$$

Daß  $\exp(-\alpha \sum_\nu |x^\nu|)$  nicht Lorentz-invariant ist, stört nicht, da eine Lorentz-Transformierte davon sich ebenso gut als Ein- und Ausschaltfaktor eignen wird.

In einem vom System  $\Sigma$  [mit den Koordinaten  $x^\mu$ ] verschiedenen System  $\Sigma'$  [mit den Koordinaten  $x'^\mu = (\delta_\nu^\mu + \varepsilon_\nu^\mu) x^\nu$ ] sollte der Streuoperator die Form

$$S'_\alpha = T(\exp\{-i \int h_\alpha(x') dx'\}) \quad (3,7)$$

haben [mit gleicher Eichung der Potentiale in  $h_\alpha(x')$  wie in  $h_\alpha(x)$ ].

Ist nun

$$\tilde{S}_\alpha = L(\varepsilon) S'_\alpha L^{-1}(\varepsilon), \quad (3,8)$$

und läßt sich zeigen, daß

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{S}_\alpha - S_\alpha}{\varepsilon} = 0 \quad (3,9)$$

gilt [mit  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_n^0 \varepsilon^{n0}}$ ], so ist die Lorentz-Invarianz des Streuoperators erwiesen. Wollte man  $\alpha$  vor  $\varepsilon$  gegen Null gehen lassen, so würde man auf Schwierigkeiten stoßen. Der Frage, ob es im Rahmen der herkömmlichen Formulierungen der Quantenelektrodynamik eine weniger pragmatische Motivierung für die richtige Reihenfolge der Grenzübergänge gibt, soll hier nicht nachgegangen werden. Da es sich bei den folgenden Rechnungen stets um  $S_\alpha$  bzw.  $h_\alpha(x)$  handeln wird, sei von hier an auf den Index  $\alpha$  verzichtet.

Die Elemente des transformierten Streuoperators lauten

$$\tilde{S}_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_n \dots dx_1 \tilde{T}(h(x_n) \dots h(x_1)). \quad (3,10)$$

Dabei ist

$$x^\mu = x'^\mu + \varepsilon_\nu^\mu x'^\nu, \quad (3,11)$$

$$\tilde{h}(x) = L(\varepsilon) h(x') L^{-1}(\varepsilon) \quad (3,12)$$

und  $\tilde{T}$  bedeutet eine Zeitordnung, die im System  $\Sigma$  durch die raumartigen Hyperebenen bestimmt ist, welche beim Übergang von  $\Sigma'$  nach  $\Sigma$  aus den Ebenen der Einsteinschen Gleichzeitigkeit in  $\Sigma'$  hervorgehen. Der Effekt des Unterschiedes zwischen  $T$  und  $\tilde{T}$  soll im folgenden kurz „ $T$ -Fehler“ genannt werden.  $O_T(\varepsilon, e^n)$  sei der Anteil von  $(\tilde{S}_n - S_n)$ , der die in  $\varepsilon$  linearen  $T$ -Fehler vereinigt und die Differenzen  $[\tilde{h}(x) - h(x)]$  vernachlässigt.  $O_A(\varepsilon, e^n)$  möge unter Vernachlässigung der  $T$ -Fehler zusammenfassen, was der für  $[\tilde{h}(x) - h(x)]$  verantwortliche Eichterm  $A(x)$  in erster Ordnung bezüglich  $\varepsilon$  zu  $(S_n - S_n)$  beiträgt. Schreibt man  $\approx$  für Gleichheit in erster Näherung bezüglich  $\varepsilon$ , so gilt

$$\tilde{S}_n - S_n \approx O_T(\varepsilon, e^n) + O_A(\varepsilon, e^n). \quad (3,13)$$

Um  $O_T(\varepsilon, e^n)$  zu bestimmen, soll zunächst der lineare  $T$ -Fehler zweier aus  $S_n$  willkürlich herausgegriffener, mit  $x$  und  $y$  bezeichneter Integrationen [bei Vernachlässigung des  $T$ -Fehlers der übrigen  $(n-2)$  Integrationen] betrachtet werden. Den Integrationsbereich, in dem sich  $T$  und  $\tilde{T}$  unterscheiden, möge für den Fall  $\varepsilon_m^0 = (\varepsilon_1^0, 0, 0)$  Abb. 1 andeuten.

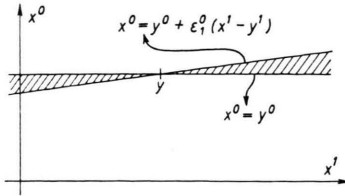


Abb. 1. Bereich, in dem die Zeitordnung durch eine Lorentz-Transformation zerstört wird.

Die schräge Gerade entspricht der Einsteinschen Gleichzeitigkeit  $x^0 = y^0$  in  $\Sigma'$ . Schreibt man  $\tilde{y}^0$  für  $y^0 + \epsilon_m^0 (x^m - y^m)$  und  $\oint d^3\mathbf{x}$  (bzw.  $\int d^3\mathbf{x}$ ) für die Integration über den Halbraum  $\epsilon_m^0 x^m < \epsilon_m^0 y^m$  (bzw.  $\epsilon_m^0 x^m > \epsilon_m^0 y^m$ ), so erhält man bei der Abspaltung des linearen  $T$ -Fehlers, welcher entsteht, wenn die  $x^0$ -Integration die  $y^0$ -Integration „überholt“, den Faktor

$$- \oint d^3\mathbf{x} \int_{\tilde{y}^0}^{y^0} dx^0 [h(y), h(x)] + \int d^3\mathbf{x} \int_{y^0}^{\tilde{y}^0} dx^0 [h(y), h(x)] \\ \approx \oint d^3\mathbf{x} [h(y), h(x)] \epsilon_m^0 (x^m - y^m). \quad (3,14)$$

Läßt man nun  $x$  und  $y$  alle  $n(n-1)$  Möglichkeiten durchlaufen, so wird jeder  $T$ -Fehler doppelt gezählt. Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Faktoren hinter dem  $T$ -Symbol geschrieben werden, erhält man schließlich nach einigen Umbenennungen

$$O_T(\epsilon, e^n) = \frac{(-i)^n}{(n-2)!} \int dx_n \dots dx_2 d^3\mathbf{x}_1 \quad (3,15) \\ \cdot T(h(x_n) \dots h(x_3) \frac{1}{2} [h(x_2), h(\mathbf{x}_1, t_2)] \epsilon_m^0 (x_1^m - x_2^m)).$$

Zur Bestimmung von  $O_A(\epsilon, e^n)$  seien zunächst wieder zwei beliebige Integrationen aus  $\tilde{S}_n$  herausgegriffen und mit  $x$  und  $y$  bezeichnet.  $[\tilde{h}(x) - h(x)]$

ist in der Valatin-Formulierung gleich  $e j_\nu(x) \partial^\nu A(x)$  und darf unter dem Integral durch

$$\dot{g}(x) = e \partial^0 (j^0(x) A(x)) \quad (3,16)$$

ersetzt werden. Integriert man über die Zeitkoordinate von  $\dot{g}(x)$ , so erhält man beim „Überholen“ der  $y$ -Integration den Kommutator  $[h(y), g(\mathbf{x}, y^0)]$ . Insgesamt ergeben sich  $n(n-1)$  derartige Kommutatoren. Nach einigen Umbenennungen erhält man

$$O_A(\epsilon, e^n) = \frac{(-i)^n}{(n-2)!} \int dx_n \dots dx_2 d^3\mathbf{x}_1 \quad (3,17) \\ \cdot T(h(x_n) \dots h(x_3) [h(x_2), g(\mathbf{x}_1, t_2)]).$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (1,17) und (1,18) und (1,9 – 12) findet man

$$\int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{x} [h(y), g(\mathbf{x}, y^0)] \quad (3,18) \\ = - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [h(y), h(\mathbf{x}, y^0)] \epsilon_m^0 (x^m - y^m).$$

Damit verschwindet  $S_n - S_n \approx O_T(\epsilon, e^n) + O_A(\epsilon, e^n)$  und es gilt

$$L(\epsilon) S L^{-1}(\epsilon) = S. \quad (3,19)$$

Es sei noch bemerkt, daß zu

$$d^3\mathbf{x} [h(y), h(\mathbf{x}, y^0)] (x^m - y^m)$$

nur das Valatin-Potential beiträgt, zu  $[h(y), g(\mathbf{x}, y^0)]$  dagegen auch das transversale Potential.

In der Gupta-Bleuler-Formulierung tritt wegen (2,12 – 29) kein  $T$ -Fehler auf.  $T(\exp\{-i \int \tilde{h}(x) dx\})$  und  $T(\exp\{-i \int h(x) dx\})$  sind bei Verwendung von (2,29) zwar nicht gleich, aber unter bestimmten Bedingungen physikalisch äquivalent, wie im Kapitel V gezeigt werden soll. Zunächst aber soll auf dem eben beschrittenen Weg noch die Coulomb-Formulierung untersucht werden.

#### IV. Lorentz-Invarianz des Streuoperators in der Coulomb-Formulierung

Der Operator der Wechselwirkungsenergiedichte besteht in der Coulomb-Formulierung aus den Termen

$$h_\perp(x) = e j_n(x) A_\perp^n(x) - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad (4,1) \quad \text{und} \quad q(x) = e^2 \int d^3\mathbf{y} \frac{j^0(x) j^0(\mathbf{y}, x^0)}{8\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4,2)$$

Der Streuoperator erhält damit die Gestalt

$$S = T(\exp\{-i \int [h_\perp(x) + q(x)] dx\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a=0}^n \frac{(-i)^n}{n!} \binom{n}{a} \left( \int dx_n \dots dx_1 \right. \quad (4,3) \\ \left. \cdot T(h_\perp(x_n) \dots h_\perp(x_{a+1}) q(x_a) \dots q(x_1)) \right).$$

An dieser Entwicklung stört, daß die  $a$ -Summation Prozesse verschiedener Ordnung in  $e$  vereinigt. Eine einfache Umordnung ergibt aber  $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$  mit

$$S_n = \sum_{b=0}^{[n/2]} \frac{(-i)^{n-b}}{(n-2b)! b!} \int dx_{n-b} \dots dx_1 T(h_\perp(x_{n-b}) \dots h_\perp(x_{b+1}) q(x_b) \dots q(x_1)). \quad (4,4)$$

$[n/2]$  bezeichnet die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als  $n/2$ . Die  $b$ -Summation faßt jetzt alle Prozesse  $n$ -ter Ordnung zusammen.

Es sei nun  $S_n'$  der in den Koordinaten des Systems  $\Sigma'$  geschriebene Ausdruck (4,4). Ferner sei

$$\tilde{S}_n = L(\varepsilon) S_n' L^{-1}(\varepsilon). \quad (4,5)$$

$$\text{Mit} \quad \tilde{h}_\perp(x) = L(\varepsilon) h_\perp(x') L^{-1}(\varepsilon) \quad (4,6), \quad \tilde{q}(x) = L(\varepsilon) q(x') L^{-1}(\varepsilon) \quad (4,7)$$

und der in Kapitel III erklärten Zeitordnung  $\tilde{T}$  gilt

$$\tilde{S}_n = \sum_{b=0}^{[n/2]} \frac{(-i)^{n-b}}{(n-2b)! b!} \int dx_{n-b} \dots dx_1 \tilde{T}(\tilde{h}_\perp(x_{n-b}) \dots \tilde{h}_\perp(x_{b+1}) \tilde{q}(x_b) \dots \tilde{q}(x_1)). \quad (4,8)$$

Die Lorentz-Invarianz des Streuoperators ist dann wieder erwiesen, wenn sich zeigen läßt, daß  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{S}_n - S_n)/\varepsilon$  verschwindet.

Auf dem gleichen Weg, auf dem sich der  $T$ -Fehler in der Valatin-Formulierung bestimmen ließ, folgt jetzt auf Grund der in Kap. I angegebenen Vertauschungsrelationen, daß  $\tilde{T}$  in  $\tilde{S}$  einfach durch  $T$  ersetzt werden darf.

Etwas ähnliches wie ein  $T$ -Fehler tritt indessen bei der Transformation der Coulomb-Wechselwirkung auf, wo die Gleichzeitigkeit der beiden in  $q(x')$  enthaltenen Ladungsdichteoperatoren verloren geht. Mit

$$\frac{d^3 \mathbf{y}'}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}'|} \approx \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (4,9), \quad L(\varepsilon) j^0(x') L^{-1}(\varepsilon) \approx j^0(x) - \varepsilon^0_n j^n(x), \quad (4,10)$$

$$j^0(\mathbf{y}, y^0 = x^0 + \varepsilon^0_n (y^n - x^n)) \approx j^0(\mathbf{y}, y^0 = x^0) + \varepsilon^0_n (y^n - x^n) \partial^0 j^0(\mathbf{y}, y^0 = x^0), \quad (4,11)$$

$$\text{und} \quad r(x) = e^2 \int \frac{d^3 \mathbf{y}}{8\pi |\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \left( j^0(x) j_m(\mathbf{x}, y^0 = x^0) \frac{\varepsilon^0_n (y^n - x^n) (y^m - x^m)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} - \varepsilon^0_n j^n(x) j^0(\mathbf{y}, y^0 = x^0) \right) \quad (4,12)$$

$$\text{findet man} \quad \tilde{q}(x) - q(x) \approx r(x). \quad (4,13)$$

Dieser Term  $r(x)$  trägt zur Differenz  $(\tilde{S}_n - S_n)$  den folgenden Ausdruck bei

$$O_T(\varepsilon, e^n) = \sum_{b=1}^{[n/2]} \frac{(-i)^{n-b}}{(n-2b)! (b-1)!} \int dx_{n-b} \dots dx_1 T(h_\perp(x_{n-b}) \dots h_\perp(x_{b+1}) r(x_b) q(x_{b-1}) \dots q(x_1)). \quad (4,14)$$

Für den Beitrag des Eichgliedes  $A_\perp(x)$  erhält man nach Ersetzung von

$$\tilde{h}_\perp(x) - h_\perp(x) = e j_r(x) \partial^r A_\perp(x) \quad (4,15), \quad \text{durch} \quad \dot{g}_\perp(x) = e \partial^0 (j^0(x) A_\perp(x)) \quad (4,16)$$

zunächst

$$O_A(\varepsilon, e^n) = \sum_{b=0}^{[n/2]} \frac{(-i)^{n-b}}{(n-2b-1)! b!} \int dx_{n-b} \dots dx_1 T(h_\perp(x_{n-b}) \dots h_\perp(x_{b+2}) g_\perp(x_{b+1}) q(x_b) \dots q(x_1)). \quad (4,17)$$

Integration über  $t_{b+1}$  ergibt wegen

$$[q(\mathbf{y}, t), g_\perp(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (4,18) \quad H_\perp(x^0) = \int d^3 \mathbf{x} h_\perp(x), \quad (5,1)$$

$$\text{und} \quad \int d^3 \mathbf{y} [h_\perp(\mathbf{y}, t), g_\perp(\mathbf{x}, t)] = -i r(\mathbf{x}, t) \quad (4,19) \quad Q(x^0) = \int d^3 \mathbf{x} q(x), \quad (5,2)$$

$$\text{die Gleichung} \quad V(x_0) = \int d^3 \mathbf{x} e j^0(x) A^{(0)}(x), \quad (5,3)$$

$$O_A(\varepsilon, e^n) = -O_T(\varepsilon, e^n). \quad (4,20) \quad \tilde{V}(x_0) = V(x_0) + \int d^3 \mathbf{x} e j^0(x) \sum_m \varepsilon^0_m A^{(m)}(x), \quad (5,4)$$

(3,19) gilt also auch in der Coulomb-Formulierung.

$$G(x^0) = \int d^3 \mathbf{x} \sum_m e j_m(x) (\partial^0 A^{(m)}_L(x) - \partial^m A^{(0)}(x)), \quad (5,5)$$

## V. Vergleich der drei Formulierungen

Die Überlegungen dieses Kapitels werden übersichtlicher, wenn man zunächst einige Volumeninte-

$$\tilde{G}(x^0) = G(x^0) + \int d^3 \mathbf{x} e j_m(x) \varepsilon^m_0 \sum_v \partial_v A^{(v)}(x). \quad (5,6)$$



Die Wechselwirkungsenergie lautet jetzt für die Coulomb-Formulierung

$$H_C(t) = H_\perp(t) + Q(t), \quad (5,7)$$

für die Valatin-Formulierung

$$H_V(t) = H_\perp(t) + \dot{V}(t), \quad (5,8)$$

für die Gupta-Bleuler-Formulierung

$$H_G(t) = H_\perp(t) + \dot{V}(t) + G(t), \quad (5,9)$$

für die Gupta-Bleuler-Formulierung nach einer Lo-

rentz-Transformation mit Hilfe von (2,29)

$$\tilde{H}_G(t) = H_\perp(t) + \dot{\tilde{V}}(t) + \tilde{G}(t). \quad (5,10)$$

(5,10) wird benötigt, um den am Schluß von Kapitel III begonnenen Nachweis für die Kovarianz der Streutheorie in der Gupta-Bleuler-Formulierung zu Ende führen zu können.

Für den Operator der Wechselwirkungstransformation in der mit (2,29) transformierten Gupta-Bleuler-Formulierung gilt

$$\begin{aligned} S_{\tilde{G}}(y^0 - x^0) &= T \left( \exp \left\{ -i \int_{x^0}^{y^0} H_G(t) dt \right\} \right) \\ &= \exp \{ -i \tilde{V}(y^0) \} T \left( \exp \left\{ -i \int_{x^0}^{y^0} (\tilde{H}_\perp(t) + \tilde{G}(t) - i[H_\perp(t) + \tilde{G}(t) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}(t), \tilde{V}(t)]) dt \right\} \right) \exp \{ i \tilde{V}(x^0) \}. \end{aligned} \quad (5,11)$$

Für die Valatin-Formulierung hat man hierin einfach  $\varepsilon_n^0 = 0$  zu setzen und den Term  $G(t)$  wegzulassen. Man kann (5,11) gewinnen, indem man in den Entwicklungselementen von  $S_{\tilde{G}}(y^0 - x^0)$  über die jeweilige Zeit von  $\dot{\tilde{V}}(t)$  integriert und umordnet. Einfacher ist die Bestätigung<sup>5</sup> von (5,11) durch Differentiation nach  $y^0$  und  $x^0$ . Mit Hilfe der im Kapitel I angegebenen Vertauschungsrelationen findet man

$$\begin{aligned} -i[H_\perp(t) + \tilde{G}(t) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}(t), \tilde{V}(t)] \\ = -\frac{1}{2}i[\dot{\tilde{V}}(t), \tilde{V}(t)] = Q(t)(1 + \varepsilon_n^0 \varepsilon^{0n}). \end{aligned} \quad (5,12)$$

Infolge des adiabatischen Ein- und Ausschaltens gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \exp \{ \mp i \tilde{V}(t) \} = 1. \quad (5,13)$$

Aus (5,12 und 13) folgt zunächst die Identität des Streuoperators  $S = S(\infty, -\infty)$  in der Valatin-Formulierung mit dem in der Coulomb-Formulierung. In der Gupta-Bleuler-Formulierung bleibt in (5,11) nach Einsetzen von (5,12) noch ein Term  $\tilde{G}(t)$ , der keine transversalen und alle nichttransversalen Photonen enthält. Zerlegt man dieses  $\tilde{G}(t)$  in  $\tilde{G}^{(+)}(t)$  (das die Photonvernichtungsoperatoren enthält) und  $\tilde{G}^{(-)}(t)$  (das die Photonerzeugungsoperatoren enthält), so gilt für jeden Zustandsvektor  $|l\rangle$ , der die Lorentz-Bedingung

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) |l\rangle = 0 \quad (5,14)$$

erfüllt, auch

$$\tilde{G}^{(+)}(t) |l\rangle = 0. \quad (5,15)$$

Da andere Zustände in der Gupta-Bleuler-Formulierung nicht zugelassen sind, und da die Photonanteile

von  $\tilde{G}^{(+)}(t)$  und  $\tilde{G}^{(-)}(t)$  sowohl miteinander als auch mit  $H_\perp(t)$  und  $Q(t)$  kommutieren, sind die Erwartungswerte des transformierten Streuoperators in der Gupta-Bleuler-Formulierung gleich denjenigen in den anderen beiden Formulierungen. [Mit den in (2,29 und 32) verwendeten Operatoren  $L(\varepsilon)$  ist die Eigenschaft eines Zustandsvektors, die Lorentz-Bedingung zu erfüllen, Lorentz-invariant.]

Notwendige Bedingung für (5,12) und damit für die Äquivalenz der drei Behandlungen der Coulomb-Wechselwirkung ist die Beziehung (1,17). Um sie erfüllen zu können, muß man darauf verzichten, das Valatin-Potential und das skalare Gupta-Bleuler-Potential als hermitesches Feld mit positiv-definiter Metrik und konventioneller Zuordnung der „negativen Frequenz“ ( $e^{ikr}$ ) zum Erzeugungsoperator zu schreiben. Es ist der Gleichung (1,17) jedoch nicht anzusehen, ob das Valatin-Potential bzw. das skalare Gupta-Bleuler-Potential

- a) wie in (1,1 – 3) „Gupta-selbstadjungiert“ ist bei indefiniter Metrik und normaler Fourier-Darstellung oder ob es
- b) wie bei Valatin bzw. vor Gupta und Bleuler selbstadjungiert ist bei positiv definiter Metrik und adjungierter Fourier-Darstellung („Vertauschung der Rolle von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator“) oder
- c) antihermitesch ( $A^{\mu*}(x) = -A^\mu(x)$ ) bei normaler Quantisierung und Fourier-Darstellung.

Bei der Behandlung der Coulomb-Wechselwirkung mit zwei nichttransversalen Photontypen läßt sich die Lorentz-Bedingung bzw. die Bedingung

$$\tilde{G}^{(+)}(t) \tilde{G}^{(-)}(t) |l\rangle = 0$$

nur im Fall a), d. h. bei indefiniter Metrik konsistent erfüllen. Beschränkt man sich jedoch auf die Lorentz-Transformation (2,29), deren Erzeugende diagonal bezüglich der vier Photontypen ist, so kann man die Lorentz-Bedingung (5,14) für die Zustände der ein- und auslaufenden Teilchen relativistisch konsistent durch die einfachere Bedingung

$$A^{0(+)}(x) |n\rangle = A_L^m(x) |n\rangle = 0 \quad (5,16)$$

ersetzen. Jetzt läßt sich  $A^0(x)$  auch antihermitesches wählen. Die Möglichkeit b) mit der adjungierten Fourier-Darstellung bleibt jedoch ausgeschlossen, da in diesem Fall  $[\partial_\mu A^{\mu(+)}(x), \partial_\nu A^{\nu(-)}(y)]$  für  $x^0 \neq y^0$  nicht verschwinden würde.

In der Valatin-Formulierung bestehen neben der Möglichkeit a) auch die Möglichkeiten b) und c). Wählt man für  $A_V^\mu(x)$  die adjungierte Fourier-Darstellung, so muß man allerdings (2,5) durch

$$i[P^\kappa, A_V^\mu(x)] = -\partial^\kappa A_V^\mu(x) \quad (5,17)$$

ersetzen, damit

$$\langle \mathbf{k} | P_V^\kappa | \mathbf{k} \rangle = k^\kappa \quad (5,18)$$

gilt, wenn  $|\mathbf{k}\rangle$  ein normierter Zustand mit einem Valatin-Photon des Impulses  $\mathbf{k}$  ist. Entsprechend muß auch (2,16) und (2,1) abgeändert werden. Deshalb ist indefinite Metrik meist bequemer. In diesem Fall muß man aber zur Vermeidung negativer Wahrscheinlichkeiten verlangen, daß es keine einlaufenden Valatin-Photonen geben soll. Da es auslaufende Valatin-Photonen dann von selbst nicht gibt, ist die Verwendung von (1,3) in der Valatin-Formulierung sogar etwas weniger problematisch als die Verwendung von (1,20) in der Gupta-Bleuler-Formulierung, wo wegen (5,11) zwar  $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) S|l\rangle = 0$  gilt, formal jedoch auch nichtverschwindende Erwartungswerte  $\langle m | S | l \rangle$  mit  $\langle m | m \rangle > 0$  und  $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) |m\rangle \neq 0$  denkbar sind.

Die Möglichkeit c) mit  $A_V^{\mu*}(x) = -A_V^\mu(x)$  hat in der Valatin-Formulierung den Vorzug, daß nicht nur die mit (1,3) und (5,17) verbundenen Asymmetrien der Möglichkeiten a) und b) vermieden werden, sondern auch eine Bedingung wie (5,16) entbehrlich wird. Es ergeben sich jedoch sowohl bei Valatin wie auch bei Gupta und Bleuler Schwierigkeiten, wenn man zur Heisenberg-Darstellung übergehen möchte; denn der Operator (5,11) für die Wechselwirkungstransformation ist im Fall c) nicht

mehr unitär. Ein möglicher Ausweg bietet sich wenigstens für die Valatin-Formulierung. Im Gegensatz zu  $S_G^{-1}(y^0 - x^0)$  läßt sich  $S_V^{-1}(y^0 - x^0)$  [mit Hilfe von (5,11) für den Fall  $G(t) = \epsilon_n^0 = 0$ ] wegen der Unitarität von  $S_C(y^0 - x^0)$  leicht angeben. Legt man den Zeitpunkt für die Koinzidenz von Heisenberg- und Wechselwirkungsdarstellung nach  $-\infty$ , und schreibt man für  $S(y^0, -\infty)$  kurz  $S(y^0)$ , so kann man die Heisenberg-Operatoren definieren durch

$$A_H^\mu(y) = S_V^{-1}(y^0) A^\mu(y) S_V(y^0). \quad (5,19)$$

In allen drei Abwandlungen der Valatin-Formulierung erhält man mit (5,11) für die Heisenberg-Operatoren die folgenden einfachen Beziehungen zur Coulomb-Formulierung:

$$S_V^{-1}(y^0) A_\perp^m(y) S_V(y^0) = S_C^+(y^0) A_\perp^m(y) S_C(y^0), \quad (5,20)$$

$$S_V^{-1}(y^0) A_V^0(y) S_V(y^0) = S_C^+(y^0) \int d^3\mathbf{x} \cdot \frac{j^0(\mathbf{x}, y^0)}{4\pi|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} S_C(y^0) + A_V^0(y), \quad (5,21)$$

$$S_V^{-1}(y^0) A_V^m(y) S_V(y^0) = A_V^m(y), \quad (5,22)$$

$$S_V^{-1}(y^0) \psi(y) S_V(y^0) = S_C^+(y^0) \psi(y) S_C(y^0) \cdot \exp\{i e A_V^{(0)}(y)\}. \quad (5,23)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Beziehungen zwischen den gestörten Greenschen Funktionen in den verschiedenen Formulierungen angeben.

Der ungestörte Propagator des Valatin-Photons lautet im Impulsraum

$$D_{FV}^{\mu\nu}(k) = -i \int d^4x e^{ik(x-y)} \quad (5,24)$$

$$\cdot \langle 0 | T(A_V^\mu(x) A_V^\nu(y)) | 0 \rangle = \frac{k^2 g^{0\mu} g^{0\nu} - k^\mu k^\nu}{\mathbf{k}^2(k^2 + i\eta)}.$$

Die Renormierung verläuft ganz ähnlich, wie man sie bei BJORKEN und DRELL<sup>13</sup> für die Coulomb-Eichung dargestellt findet. Aus der Betrachtung der Äquivalenz der drei Formulierungen mit Hilfe von (5,11–13) folgt bereits, daß die nackte Ladung  $e$  ebenso wie die Massenrenormierung  $\delta m$  in den drei Formulierungen dieselbe Größe hat.

Herrn Professor Dr. G. LÜDERS bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für zahlreiche kritische Bemerkungen und weiterhelfende Hinweise sehr dankbar.

<sup>13</sup> J. D. BJORKEN u. S. D. DRELL, Relativistische Quantenfeldtheorie, Kap. 17,9 und Kap. 19. B. I. Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim 1967.